Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MATEMÁTICAS I (MA-1111)
Primer Parcial (40 %)

Nombre:________________________________

Carnet:________________ Sección:________

Examen TIPO: B

Justifique <u>todas</u> sus respuestas.

1.

$$\begin{aligned} |4-x| + |2x-1| &\leq 4x \\ |4-x| + |2x-1| - 4x &\leq 0 \end{aligned}$$

Consideramos $x = 4,\ \ x = 1/2$ y estudiamos por casos.

$$|4-x| = \begin{cases} 4-x & \text{si } \ 4-x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 4 \geq x \\ -4+x & \text{si } \ 4-x < 0 \ \Leftrightarrow \ 4 < x \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & 2x-1 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 1/2 \\ -2x+1 & 2x-1 < 0 \qquad\quad x < 1/2 \end{cases}$$

a) Si $x \in (-\infty, 1/2)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} (4-x) + (-2x+1) - 4x &\leq 0 \\ -3x + 5 - 4x &\leq 0 \\ -7x + 5 &\leq 0 \ \Rightarrow \ x > 5/7, \quad x \in [2/7, \infty) \end{aligned}$$

Solución en este caso $\boxed{x \in (-\infty, 1/2) \cap [5/7, \infty) = \phi}$

b) Si $x \in [1/2, 4]$ entonces

$$\begin{aligned} (4-x) + (2x-1) - 4x \leq 0 \\ -3x + 3 \leq 0 \\ -x \leq -1 \\ x \geq 1 \ \Rightarrow x \in [1, \infty) \end{aligned}$$

Asi $\boxed{x \in [1/2, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]}$

c) Si $x \in (4, \infty)$ entonces,

$$\begin{aligned} (-4 + x) + (2x - 1) - 4x &\leq 0 \\ -x - 5 &\leq 0 \\ -x &\leq 5 \\ x &\geq -5 \Rightarrow x \in [-5, \infty) \end{aligned}$$

Así la solución será

$$x \in (4, \infty) \cap [-5, \infty) = (4, \infty)$$

Solución general:

$$x \in (4, \infty) \cup [1, 4] \cup \phi \Rightarrow x \in [1, \infty)$$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y + k = 0 \end{cases}$

Al despejar $y = 2x + k \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 + (2x + k)^2 &= 16 \\ x^2 + 4x^2 + 4xk + k^2 &= 16 \\ 5x^2 + 4xk + (k^2 - 16) &= 0 \end{aligned}$$

Estudiamos el discriminante: $D = 16k^2 - 4 \cdot 5(k^2 - 16) \Rightarrow D = -4k^2 + 320.$

a) Para que la recta intercepte a la circunferencia en dos puntos,

$$\begin{aligned} -4k^2 + 320 > 0 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 &< 320 \\ k^2 &< 80 \\ k &\in (-4\sqrt{5}, 4\sqrt{5}) \end{aligned}$$

b) Para que no se toquen recta y circunferencia,

$$-4k^2 + 320 < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -4\sqrt{5}) \cup (4, \sqrt{5} + \infty)$$

c) Para que la recta sea tangente a la circunferencia,

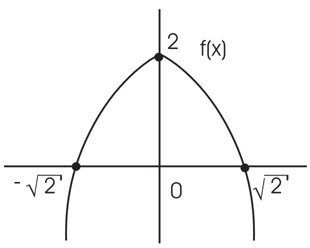
$$-4k^2 + 320 = 0 \Rightarrow k = \pm 4\sqrt{5}$$

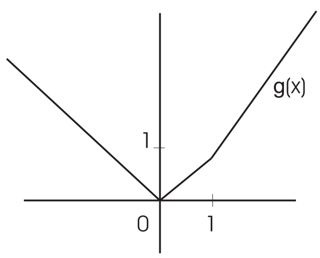
En este caso, los puntos de tangencia son calculados al considerar las soluciones:
$x_{1,2} = -4k \pm \sqrt{320 - 4k^2}/10$
Si $k = 4\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -16\sqrt{5}/10.$
Si $k = -4\sqrt{5} \Rightarrow x_2 = 16\sqrt{15}/10.$

3. Vamos a considerar las funciones: $f(x) = 2 - x^2$

$g(x) \begin{cases} |x| & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

a) Grafique f y g :





b) Dominio $f = \mathbb{R}$ Dominio $g = \mathbb{R}$
Rango $f = (-\infty, 2]$ Rango $g = [0, \infty)$

c) $g(f(x)) = \begin{cases} |f(x)| & \text{si } f(x) < 1 \\ 2f(x) - 1 & \text{si } f(x) \geq 1 \end{cases}$

$f(x) < 1$ si $2 - x^2 < 1 \Rightarrow -x^2 < -1$
$x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$f(x) \geq 1$ si $2 - x^2 \geq 1 \Rightarrow -x^2 \geq -1$
$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$ y $g(f(x)) = 2(2 - x^2) - 1 = 3 - 2x^2$.

$$g(f(x)) = \begin{cases} |2 - x^2| & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 3 - 2x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

d) $g(f(1)) = 3 - 2 - 1\,;\quad g(f(-3)) = |2 - 9| = 7$

4. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

a) Inyectividad.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) \text{ si } \frac{a+1}{b-1} = \frac{b+1}{b-1} \Rightarrow (a-1)(b+1) &= (a-1)(b+1) \\ ab - a + b - 1 &= ab + a - b - 1 \\ 2b &= 2a \\ b &= a \end{aligned}$$

Asi si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

b) $f^{-1}(y)$ está dada por:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y - x - 1 &= 0 \\ x(y-1) &= y + 1 \\ x &= \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

c) $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = \dfrac{4}{2} = 2$

$f(f^{-1}(3)) = f(2) = \dfrac{2+1}{2-1} = 3$

d) $$f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x$$